Corrigé

Dans cet exercice, on modélise le développement d'une bactérie avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité 0,3 de mourir sans descendance et une probabilité 0,7 de se diviser en deux bactéries filles. Pour tout entier naturel n, on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie.
On admet que, d'après ce modèle, la suite (p_n) est définie de la façon suivante :
$p_0 = 0,3$ et, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2$.

1. La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées de la suite (p_n)
   a. • $p_1 = 0,3+0,7\times 0,3^2 = 0,3+0,7\times 0,09 = 0,3+0,063 = 0,363$;
   • $p_2 = 0,3+0,7\times 0,363^2 = 0,3+0,7\times 0,131769 = 0,3+0,0922383 = 0,3922383$.
   b. La probabilité d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type est égale à $1-p_{10} = 1-0,42802018 = 0,57117182 \approx 0,571$ au millième près.
   c. D'après le tableau la suite (p_n) semble être croissante et semble aussi avoir une limite puisque les quatre derniers résultats commencent par 0,428 5...
2. **a.** On veut démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$.
   Initialisation : On a $0 \leqslant 0,3 \leqslant 0,363 \leqslant 0,5$, soit $0 \leqslant p_0 \leqslant p_1 \leqslant 0,5$: la relation est vraie au rang 0.
   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$.
   Si ces nombres positifs sont rangés dans dans cet ordre, leurs carrés aussi, soit
   $0 \leqslant p_n^2 \leqslant p_{n+1}^2 \leqslant 0,5^2$, puis en multipliant par 0,7 :
   $0 \leqslant 0,7\times p_n^2 \leqslant 0,7\times p_{n+1}^2 \leqslant 0,7\times 0,5^2$ et enfin en ajoutant à chaque membre 0,3 :
   $0,3 \leqslant 0,3+0,7\times p_n^2 \leqslant 0,3+0,7\times p_{n+1}^2 \leqslant 0,3+0,7\times 0,5^2$, soit
   $0,3 \leqslant p_{n+1} \leqslant p_{n+2} \leqslant 0,475$. On peut donc écrire :
   $0 \leqslant p_{n+1} \leqslant p_{n+2} \leqslant 0,5$: la relation est vraie au rang $n+1$.
   Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est encore vraie au rang $n+1$: d'après la principe de récurrence, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$
   b. Le résultat précédent montre que la suite (p_n) est croissante et majorée par 0,5 : elle est donc convergente vers une limite L telle que $L \leqslant 0,5$.
3. **a.** Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} p_{n+1} = L$, la relation de récurrence donne :

$$L = 0,3+0,7L^2 \iff 0,7L^2 - L + 0,3 = 0$$

   L est solution de l'équation $0,7x^2 - x + 0,3 = 0$.

b. On a $\Delta = 1 - 4 \times 0,7 \times 0,3 = 1 - 0,84 = 0,16 = 0,4^2 > 0$. Il y a donc deux solutions :

$$L_1 = \frac{1+0,4}{2\times 0,7} = 1, \quad \text{et} \quad L_2 = \frac{1-0,4}{2\times 0,7} = \frac{0,6}{1,4} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \approx 0,43$$

On ne peut retenir la solution L_1 puisque (p_n) est majorée par 0,5. Il reste donc L_2 : $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{3}{7}$.

4. La fonction suivante, écrite en langage Python, a pour objectif de renvoyer les n premiers termes de la suite (p_n).
On complète, les lignes 2, 4 et 5 de cette fonction de façon à ce que la fonction `suite (n)` retourne, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite.

```
1 def suite(n) :
2   p = 0.3
3   s = [p]
4   for i in range (n - 1)
5       p = 0.3+0.7*p*p
6       s.append(p)
7   return (s)
```